Но применение эллиптических функций $\wp u$ и σu, а также использование теоретико-числовых соображений позволили ему разыскать как достаточные, так и необходимые условия приведения этого интеграла к типу псевдо-эллиптических, а также найти все частные случаи, когда такое приведение возможно.

Метод, отличный от всех предыдущих и названный «деривационным», применил к рассматриваемой задаче Н. В. Бугаев[1]. Он представил условие для выражения эллиптического интеграла в конечном виде в форме детерминанта. Но это условие является только достаточным, поэтому метод Бугаева не давал определенного ответа в случае, если оно не выполнялось[2].

Следовательно, только П. Л. Чебышев и Е. И. Золотарев решили задачу полностью и в самом общем виде. Методы же, введенные их последователями, не позволяли сделать этого, хотя и приносили облегчение в отдельных частных случаях.

Параллельно с решением рассмотренного выше вопроса идут исследования в другом направлении, связанном с ним, которое представляет поиски новых методов приведения интегралов

$$\int f(x, \sqrt{R(x)})\, dx, \tag{9}$$

где $R(x)$ — полином степени не выше четвертой, к канонической форме эллиптических интегралов и выражение их там, где это возможно, через эллиптические функции.

К интегралу (9) со времен Лежандра применялось преобразование

$$x = \frac{A + By}{1 + Cy}, \tag{10}$$

где коэффициенты определялись так, чтобы полином под знаком корня содержал только члены четной степени.

В 1864 году Н. Н. Алексеев опубликовал[3] свой способ нахождения коэффициентов, опирающийся на исследования Серре и состоящий в определении корней соответственно выбранной резольвенте, которая имеет вид

$$\theta^3 - (3p^2 - 8q)\theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr -$$
$$- 64s)\theta - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0,$$

причем $\Theta = t^2$, а $t = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — корни полинома $R(x)$. С помощью корней резольвенты Н. Н. Алексеев выражает не только коэффициенты A, B, C преобразования (10), но модуль k эллиптического интеграла и множитель M в равенстве

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = M \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}}$$

---

[1] Н. В. Бугаев. Complément á un probléme d'Abel. Comptes rendus, t. 118. Paris, 1891, pp. 1025—1028; Выражение эллиптических интегралов в конечном виде. М. 1892; Общие условия интегрируемости в конечном виде эллиптического дифференциала. СПб., 1892.

[2] Именно поэтому работы Н. В. Бугаева вызвали возражения со стороны А. А. Маркова, изложенные им в рапорте президенту Академии наук. См. Архив АН СССР, Ленингр. отд., ф. 143, оп. I, № 51.

[3] Н. Алексеев. Sur la réduction d'une integrale, contenant un radical de second dègre d'un polinôme de quartième, à la forme canonique d'une integrale elliptique et sur le calcul du module. Comptes rendus, t. 59. Paris, 1864, pp. 244—248. На русском языке этот способ был изложен Н. Н. Алексеевым в кн.: «Интегральное исчисление», т. II. М. 1874, гл. VI.

Cela étant, on a

$$xu'' + 2(\alpha x + \gamma)u' + (2\alpha\gamma - a)u = 0.$$

» Or la dernière équation n'admet une solution

$$u = \text{une fonction entière de } x$$

que pour les valeurs de

$$\frac{a - 2\alpha\gamma}{2\alpha} = \frac{a}{2\alpha} - \gamma,$$

entières et plus grandes que -1.

» Par exemple, dans le cas

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad h = \tfrac{15}{4},$$

on trouve, parmi les fonctions z satisfaisant à l'équation différentielle

$$x^4(z' + z^2) + 2x^2z - x^4 - x^3 - \tfrac{15}{4}x^2 - 2x + 1 = 0,$$

deux rationnelles

$$z = -1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{2}{2x+3}$$

et

$$z = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{4x - 4}{2x^2 - 4x + 3}$$

et, conformément à cela,

$$y = C_1 e^{-x+\frac{1}{x}} x^{-\frac{3}{2}}(2x + 3) + C_2 e^{x+\frac{1}{x}} x^{-\frac{3}{2}}(2x^2 - 4x + 3)$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$x^4 y'' + 2x^2 y' - (x^4 + x^3 + \tfrac{15}{4}x^2 + 2x - 1)y = 0. \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Complément à un problème d'Abel.* Note de M. **Bougaief**, présentée par M. Darboux.

« Abel a démontré que l'intégrale elliptique $\int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{R}}$ peut être quelquefois présentée sous la forme

$$(1) \qquad \int \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m} \log\left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right),$$

où R est un polynôme de quatrième degré

$$R = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4;$$

p et q sont des polynômes entiers premiers entre eux. Dans le cas où q est un polynôme de degré λ, p est de degré $\lambda + 2$ et $m = 2(\lambda + 2)$.

» La condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients du polynôme R pour que le polynôme q soit du degré λ peut être représentée par l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_\lambda \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{\lambda+1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \dots & \alpha_{\lambda+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_\lambda & \alpha_{\lambda+1} & \alpha_{\lambda-2} & \dots & \dots & \alpha_{2\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\alpha_0 = \frac{D^3(\sqrt{p_0})}{\Pi(3)}, \qquad \alpha_1 = \frac{D^4(\sqrt{p_0})}{\Pi(4)}, \qquad \dots, \qquad \alpha_\lambda = \frac{D^{\lambda+2}(\sqrt{p_0})}{\Pi(\lambda+2)},$$

$$\Pi(n) = 1.2.3\dots n,$$

et $D^\lambda(\sqrt{p_0})$ est une dérivation de l'expression $\sqrt{p_0}$ de l'ordre λ.

» En calculant une dérivation $Df(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$, il faut suivre, en général, les règles de la différentiation et prendre en considération les conditions suivantes de la dérivation

$$Dp_0 = p_1, \quad Dp_1 = 2p_2, \quad Dp_2 = 3p_3, \quad \dots, \quad Dp_n = (n+1)p_{n+1},$$

de sorte que l'on ait

$$Df(p_0, p_1, \dots, p_n) = \frac{df}{dp_0} p_1 + \frac{df}{dp_1} 2p_2 + \frac{df}{dp^2} 3p_3 + \dots + \frac{df}{dp_n}(n+1)p_{n+1}.$$

» Dans le cas considéré

$$p_5 = 0, \qquad p_6 = 0, \qquad \dots .$$

» On peut bien voir qu'il existe un nombre infini de cas d'intégrabilité de l'expression (1).

» Les plus simples conditions sont les suivantes :

$$(3) \qquad \alpha_0 = \frac{D^3(\sqrt{p_0})}{1.2.3} = 0,$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 = 0.$$

» Pour $p_0 = 1$, la condition (3) donne l'équation

$$8p_3 - 4p_1p_2 + p_1^3 = 0.$$

» La condition (4) prend une forme de l'équation

$$\left\{4D^3(\sqrt{p_0})D^5(\sqrt{p_0}) - 5[D^4(\sqrt{p_0})]^2\right\}_{p_0=1} = 0,$$

déjà assez compliquée.

» En désignant les expressions $D(\sqrt{p_0})$, $D^2(\sqrt{p_0})$, ..., $D^\lambda(\sqrt{p_0})$ par D_1, D_2, ..., D_λ, on trouve les équations suivantes entre les quantités D_μ :

$$2\sqrt{p_0}\,D_1 = p_1,$$
$$D_1^2 + \sqrt{p_0}\,D_2 = p_2,$$
$$\sqrt{p_0}\,D_3 + 3D_1D_2 = 3p_3,$$
$$\sqrt{p_0}\,D_4 + 4D_1D_3 + 3D_2^2 = 12p_4.$$

» En général, pour chaque nombre pair p, on a

$$(5)\qquad 2\sqrt{p_0}\frac{D_p}{\Pi(p)} + \frac{2D_1D_{p-1}}{\Pi(p-1)} + \frac{2D_2D_{p-2}}{\Pi(2)\Pi(p-2)} + \ldots \left[\frac{D_{\frac{p}{2}}}{\Pi\left(\frac{p}{2}\right)}\right]^2 = 0,$$

et pour chaque nombre impair i

$$(6)\qquad \sqrt{p_0}\frac{D_i}{\Pi(i)} + \frac{D_1D_{i-1}}{\Pi(i-1)} + \frac{D_2D_{i-2}}{\Pi(2)\Pi(i-2)} + \ldots = 0,$$

» Les nombres p et i sont plus grands que 4.

» Les équations (5) et (6) donnent le moyen de calculer plus vite les coefficients α_0, α_1, ... du déterminant (2).

» *Exemple.* — Pour l'intégrale $\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}}$, on a

$$p_0 = 1,\qquad p_1 = 0,\qquad p_2 = -2,\qquad p_3 = -1,\qquad p_4 = 0,$$
$$D_1 = 0,\qquad D_2 = -2,\qquad D_3 = -3,\qquad D_4 = -12,\qquad D_5 = -60,$$

$$\alpha_0 = \frac{D_3}{1.2.3} = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_1 = \frac{D_5}{1.2.3.4} = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_2 = \frac{D_5}{1.2.3.4.5} = -\frac{1}{2}.$$

» Donc

$$\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{vmatrix} = 0.$$

» Le polynôme q est de premier et p de troisième degré, $m=6$. En effet,

$$\int \frac{(x+\frac{1}{3})\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-x}} = \frac{1}{6}\log\left[\frac{2x^3-2x^2-2x+1+(2x-2)\sqrt{x^4-2x^2-x}}{2x^3-2x^2-2x+1-(2x-2)\sqrt{x^4-2x^2-x}}\right]. »$$

OPTIQUE. — *Sur un nouveau réfractomètre*. Note de M. C. **Féry**, présentée par M. Schützenberger (¹).

« L'importance de la mesure des indices de réfraction n'est plus à démontrer : tant au point de vue théorique que pratique, la connaissance de ce facteur donne des indications précieuses; aussi plusieurs appareils ont-ils été imaginés pour remplacer la méthode classique un peu longue et délicate du goniomètre.

» Cependant aucun d'eux ne remplit encore, d'une manière complète, les conditions multiples exigées pour un tel appareil, qui doit ne nécessiter l'application d'aucune formule, ne demander aucun réglage ni manipulation délicate pouvant influer sur l'exactitude du résultat et cependant présenter de l'exactitude et de la précision.

» C'est cette lacune que j'ai cru combler en imaginant l'appareil que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui.

» Le principe sur lequel il repose est très simple : il consiste à annuler par un prisme solide d'angle variable et d'indice constant la déviation imprimée à un rayon lumineux par un prisme creux d'angle fixe et assez petit qui est rempli du liquide à mesurer.

» L'angle que devra avoir le prisme solide permettra d'évaluer l'indice inconnu du corps à étudier. En effet, si nous prenons des angles prismatiques assez petits pour que la formule

$$n = \frac{i}{r}$$

soit applicable, nous pourrons écrire, quand le rayon émergent ayant traversé les deux prismes sortira parallèle à sa direction incidente,

$$(n-1)\alpha = (x-1)A,$$

(¹) Ce travail a été fait à l'École municipale de Physique et de Chimie, laboratoire de M. le professeur Baille.

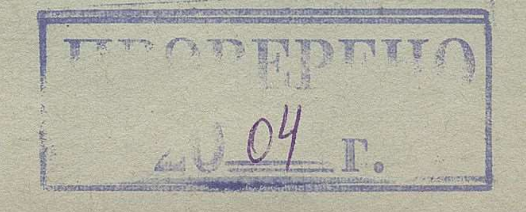
ВЫРАЖЕНІЕ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ
ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.

МОСКВА.

1892.

Цѣна 40 коп.


ПРОВЕРЕНО
20 04 г.

ВЫРАЖЕНІЕ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страст. бульв.
1892



Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при
Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.
Математическій Сборникъ, Т. XVI.

ВЫРАЖЕНІЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.

(Читано въ засѣданіи Математическаго Общества 19 ноября 1891 года).

§ 1. **Общая постановка вопроса.** Вопросу о выраженіи эллиптическихъ интеграловъ въ конечномъ видѣ посвящено много изслѣдованій.

Этотъ вопросъ начатъ изысканіями Абеля [1]) объ интегрированіи дифференціала

$$\frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}.$$

Изслѣдованія Абеля продолжали Liouville, Чебышевъ [2]), Піума [3]), Золотаревъ [4]), Вейерштрассъ, Пташицкій [5]).

---

[1]) *Abel.* Sur l'intégration de la formule differentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant des fonctions entierès. Oeuvres complètes 1839. T. I.

[2]) *Tchebychef.* Sur l'intégration de la differentielle

$$\frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$$

Bulletin. 1860.

b) Journal des mathématiques. 1853 и 1858.

[3]) Annali de matematica. 1861.

[4]) *Золотаревъ.* Теорія комплексныхъ чиселъ. Спб., 1874.

[5]) *Пташицкій.* Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ. Спб., 1888.

Метода Абеля находится въ тѣсной связи съ разложеніемъ $\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}$ въ непрерывную дробь. Всѣ остальные изслѣдователи прямо и непосредственно примыкаютъ къ методѣ Абеля, присоединяя къ ней еще пріемъ преобразованія перемѣнныхъ.

Этими изслѣдованіями въ значительной степени исчерпанъ вопросъ въ его связи съ теоріею непрерывныхъ дробей.

Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду указать на связь этого вопроса съ вопросомъ о нахожденіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, а слѣдовательно и на его связь съ началомъ наибольшихъ и наименьшихъ показателей.

Эта связь можетъ въ будущемъ повести къ изслѣдованіямъ въ другомъ направленіи и представляетъ свои выгоды при вычисленіяхъ. Кромѣ того эта связь двухъ вопросовъ отличается своею простотою.

Положимъ, согласно съ Абелемъ, что эллиптическій интегралъ выражается помощію логариѳмической функціи формулою:

$$\int\frac{Mdx}{N\sqrt{R}} = lg\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right) \qquad (1)$$

гдѣ M, N цѣлые, а p и q цѣлые и взаимно простые полиномы.

$$R = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4.$$

Взявъ дифференціалъ уравненія (1), получаемъ уравненіе:

$$\frac{Mdx}{N\sqrt{R}} = \frac{pqdR + 2(pdq - qdp)R}{(p^2 - q^2R)\sqrt{R}}$$

откуда для опредѣленія p и q Абель получаетъ два уравненія:

$$pq\frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)R = M \qquad (2)$$

$$p^2 - Rq^2 = N. \qquad (3)$$

Взявъ производную уравненія (3), получаемъ уравненіе:

$$2p\frac{dp}{dx}-\frac{dR}{dx}q^2-2q\frac{dq}{dx}R=\frac{dN}{dx}. \qquad (4)$$

Умножая уравненіе (2) на p и замѣняя p^2 и $2p\frac{dp}{dx}$ ихъ величинами, опредѣляемыми изъ уравненій (3) и (4), получаемъ уравненіе:

$$\frac{dR}{dx}q(N-Rq^2)+2R\frac{dq}{dx}(N+Rq^2)-$$

$$-Rq\left(\frac{dN}{dx}+\frac{dR}{dx}q^2\right)+2Rq\frac{dq}{dx}=Mp$$

или уравненіе:

$$\left(N\frac{dR}{dx}-R\frac{dN}{dx}\right)q+2NR\frac{dq}{dx}=Mp. \qquad (5)$$

§ 2. **Дифференціальныя уравненія, рѣшающія вопросъ.** Такъ какъ академикъ Чебышевъ показалъ, что вопросъ о выраженіи интеграла $\int\frac{Mdx}{N\sqrt{R}}$ приводится къ вопросу о представленіи въ конечномъ видѣ интеграла:

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}$$

то, не нарушая общности вопроса, мы можемъ при изслѣдованіи положить:

$$M=m(x+A)C \qquad (6)$$

$$N=C \qquad (7)$$

гдѣ C нѣкоторое произвольное постоянное.

Уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{m}lg\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right) \qquad (8)$$

Вопросъ объ условіяхъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто уравненіе (8), приводится къ опредѣленію p, q, m, A при помощи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$pq\frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)R = m(x + A)C \tag{9}$$

$$p^2 - Rq^2 = C. \tag{10}$$

Уравненія (9) и (10) получаются прямо изъ уравненій (2) и (3).

Уравненіе (5) даетъ уравненіе:

$$2R\frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx}q = m(x + A)p. \tag{11}$$

§ 3. **Предварительныя заключенія о полиномахъ p, q и числѣ m.**

Три уравненія (9), (10) и (11) даютъ возможность судить о цѣлыхъ полиномахъ p, q и количествѣ m. Означивъ по Абелю степень полиномовъ p и q черезъ $\delta(p)$ и $\delta(q)$ и полагая

$$\delta(p) = \mu,\ \delta(q) = \lambda$$

мы на основаніи уравненія (10) находимъ:

$$\delta(p^2) = \delta(R) + \delta(q^2)$$

или

$$2\mu = 2\lambda + 4$$

$$\mu = \lambda + 2.$$

Отсюда

Первое заключеніе: *Уравненіе $\mu = \lambda + 2$ показываетъ, что степень цѣлаго полинома p на двѣ единицы болѣе степени цѣлаго полинома q.*

Полагаемъ

$$p = \alpha_1 x^{\lambda+2} + \alpha_2 x^{\lambda+1} + \alpha_3 x^{\lambda} + \ldots \tag{13}$$

$$q = \beta_1 x^{\lambda} + \beta_2 x^{\lambda-1} + \ldots \tag{14}$$

Разсмотримъ тотъ случай, когда $c_4 = 1$, и полиномъ 4-й степени R данъ въ видѣ

$$R = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + x^4$$

Сравнивая коеффиціенты при $x^{2\lambda+4}$ уравненія (10), находимъ соотношеніе:

$$\alpha_1{}^2 - \beta_1{}^2 = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ и}$$

$$\alpha_1 = -\beta_1.$$

Отсюда

Второе заключеніе: *Коеффиціенты при старшихъ степеняхъ полиномовъ p и q равны или имѣютъ противуположный знакъ.*

Разсмотримъ порядки членовъ дифференціальнаго уравненія (11). Порядки его членовъ будутъ:

$$\delta\left(2R\frac{dq}{dx}\right) = \lambda + 3,$$

$$\delta\left(\frac{dR}{dx}q\right) = \lambda + 3,$$

$$\delta(mxp) = \lambda + 3,$$

$$\delta(mAp) = \lambda + 2.$$

Мы разсмотримъ случай, когда

$$\alpha_1 = \beta_1. \tag{15}$$

Будемъ обозначать коеффиціентъ при x^m у полинома Q черезъ $K_m(Q)$, тогда на основаніи уравненія (11) имѣемъ соотношеніе:

$$K_{\lambda+3}\left(2R\frac{dq}{dx}\right) + K_{\lambda+3}\left(\frac{dR}{dx}q\right) = mK_{\lambda+3}(xp)$$

или

$$2\lambda\alpha_1 + 4\alpha_1 = m\alpha_1,$$

откуда имѣемъ соотношеніе:

$$2(\lambda + 2) = m \tag{16}$$

изъ котораго вытекаетъ

Третье заключеніе: *Число m есть всегда число цѣлое и равно удвоенному показателю полинома p.*

Уравненіе (8) показываетъ, что коеффиціентъ при старшей степени x полинома p всегда можетъ быть приведенъ къ 1, слѣдовательно мы можемъ всегда положить:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1. \tag{a}$$

Полиномы p и q принимаютъ видъ:

$$p = x^{\lambda+2} + \alpha_2 x^{\lambda+1} + \ldots \tag{17}$$

$$q = x^{\lambda} + \beta_2 x^{\lambda-1} + \ldots \tag{18}$$

Мы въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ представлять полиномы p и q въ видѣ:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2\lambda+2} x^{2\lambda+2} \tag{19}$$

$$q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{\lambda} x^{\lambda} \tag{20}$$

гдѣ на основаніи уравненія (15)

$$a_{2\lambda+2} = b_{\lambda} = 1.$$

Представленіе полиномъ p и q въ формѣ (19) и (20), какъ увидимъ впослѣдствіи, удобно для дериваціонныхъ вычисленій.

§ 4. **Простѣйшая связь между полиномами p и q.**

Взявъ производную уравненія (10), получаемъ уравненіе:

$$2p\frac{dp}{dx} = q\left(\frac{dR}{dx}q + 2R\frac{dq}{dx}\right). \tag{21}$$

Такъ какъ p и q взаимно-простые полиномы, то уравненіе

(21) показываетъ, что полиномъ $\frac{dp}{dx}$ дѣлится нацѣло на полиномъ q.

Означая частное отъ дѣленія $\frac{dp}{dx}$ на q черезъ ξ, получимъ соотношеніе:

$$\frac{dp}{dx} = q\xi. \tag{22}$$

Изъ уравненія

$$\delta\left(\frac{dp}{dx}\right) = \delta q + \delta\xi$$

или

$$\lambda + 1 = \lambda + \delta(\xi)$$

видно, что $\delta(\xi) = 1$, слѣдовательно ξ есть выраженіе первой степени.

Вставляя выраженіе (22) въ уравненіе (21), получимъ по сокращеніи на q равенство:

$$\frac{dR}{dx}\,q + 2R\,\frac{dq}{dx} = 2p\xi \tag{23}$$

На основаніи уравненія (11) имѣемъ:

$$\frac{dR}{dx}\,q + 2R\,\frac{dq}{dx} = m(x + A)p$$

слѣдовательно

$$m(x + A)p = 2p\xi,$$

откуда

$$\xi = \frac{1}{2}\,m(x + A). \tag{24}$$

Такимъ образомъ между p и q устанавливается простая зависимость, выражаемая уравненіемъ:

$$2\,\frac{dp}{dx} = m(x + A)q. \tag{25}$$

§ 5. Основныя линейныя дифференціальныя уравненія, опредѣляющія полиномы p и q.

Изъ двухъ уравненій:

$$2\frac{dp}{dx} = m(x + A)q \tag{25}$$

$$2R\frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx}q = m(x + A)p \tag{11}$$

легко получается то линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка, которому удовлетворяетъ цѣлая функція q.

Изъ уравненія (25) имѣемъ:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x+A}\left(2R\frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx}q\right) = m\frac{dp}{dx} = \frac{m^2}{2}(x + A)q,$$

откуда получаемъ окончательно линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$4(x+A)R\frac{d^2q}{dx^2} + 2\left[3(x + A)\frac{dR}{dx} - 2R\right]\frac{dq}{dx} +$$

$$+\left[2(x + A)\frac{d^2R}{dx^2} - 2\frac{dR}{dx} - m^2(x + A)^3\right]q = 0. \tag{I}$$

Это уравненіе мы будемъ называть *основнымъ уравненіемъ*.

Полагая въ уравненіи (I)

$$q = e^{\int u dx}$$

мы послѣ сокращеній получаемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$4(x+A)R\frac{du}{dx} + 4(x + A)Ru^2 + 2\left[3(x + A)\frac{dR}{dx} - 2R\right]u +$$

$$+ 2(x + A)\frac{d^2R}{dx^2} - 2\frac{dR}{dx} - m^2(x + A)^3 = 0 \tag{26}$$

интеграломъ котораго будетъ раціональная функція

$$u = \frac{1}{q}\frac{dq}{dx}.$$

Изъ уравненія (25) также получаемъ уравненія:

$$mq = \frac{2}{x+A}\frac{dp}{dx},$$

$$m\frac{dq}{dx} = \frac{2}{x+A}\frac{d^2p}{dx^2} - \frac{2}{(x+A)^2}\frac{dp}{dx}.$$

Вставляя эти величины въ уравненіе (11) послѣ приведенія къ одному знаменачелю, получаемъ линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$4R(x+A)\frac{d^2p}{dx^2} + 2\left[\frac{dR}{dx}(x+A) - 2R\right]\frac{dp}{dx} = m^2(x+A)^3p, \quad \text{(II)}$$

которому удовлетворяетъ функція p.

Три уравненія (25), (I) и (II) совершенно достаточны для рѣшенія вопроса, т. е. для опредѣленія полиномовъ p, q и количествъ m, A, удовлетворяющихъ уравненію (8).

Если будетъ найденъ полиномъ q, то по уравненію (25) найдемъ и полиномъ p и обратно.

§ 6. Деривaціонныя уравненія для опредѣленія полиномовъ p и q.

Лучше всего начать опредѣленіе съ полинома q. Для этого нужно найти цѣлый частный интегралъ дифференціальнаго уравненія (I). При этомъ однако встрѣтится затрудненіе въ томъ, что мы не знаемъ величины цѣлаго числа λ, то есть степени этого полинома и числа $m = 2(\lambda + 2)$. Въ такомъ случаѣ придется отыскивать интегралы этого уравненія въ предположеніяхъ:

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

$$m = 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots$$

то есть рѣшать вопросъ о томъ, не будутъ ли частными интегралами уравненія (I) полиномы степени 0, 1, 2, 3,... и т. д.

Вмѣсто того, чтобы вести вычисленіе такимъ образомъ, мы предлагаемъ деривaціонный пріемъ, который гораздо быстрѣе ведетъ къ цѣли.

Въ уравненіи (8)

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4}} = \frac{1}{m} lg\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right) \quad (8)$$

гдѣ

$$p=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2\lambda+1}x^{2\lambda+1}+a_{2\lambda+2}x^{2\lambda+2}$$

$$q=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{\lambda-1}x^{\lambda-1}+b_\lambda x^\lambda$$

мы полагаемъ

$$c_4=1,\ a_{2\lambda+2}=1,\ b_\lambda=1.$$

При примѣненіи деривaціоннаго пріема мы должвы помнить, что деривaціи находятъ также какъ и дифференціалы, и деривaціи коэффиціентовъ удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$Дc_0 = c_1$$

$$Дc_1 = 2c_2$$

$$Дc_2 = 3c_3$$

$$Дc_3 = 4c_4 = 4$$

$$Дc_4 = 0$$

$$Дa_0 = a_1$$

$$Дa_1 = 2a_2$$

....

$$Дa_{2\lambda+1} = (2\lambda+2)a_{2\lambda+2} = 2\lambda+2$$

$$Дa_{2\lambda+2} = 0$$

$$Дb_0 = b_1$$

$$Дb_2 = 2b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Дb_{\lambda-1} = \lambda b_\lambda = \lambda$$

$$Дb_\lambda = 0$$

Кромѣ того

$$ДA = 1.$$

Количества m и λ при деривацiи должно считать постоянными. Нашъ деривацiонный прiемъ изложенъ въ нашемъ сочиненiи «Общiя основанiя исчисленiя $E\varphi(x)$» [1]).

Уравненiе (25) при $x = 0$ даетъ уравненiе

$$2a_1 = mAb_0$$

или уравненiе

$$a_1 = (\lambda + 2)Ab_0 \tag{27}$$

Это уравненiе послѣ ряда послѣдовательныхъ деривацiй и сокращенiй даетъ уравненiя:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= (\lambda+2)Ab_0 \\ 2a_2 &= (\lambda+2)(b_0+Ab_1) \\ 3a_3 &= (\lambda+2)(b_1+Ab_2) \\ 4a_4 &= (\lambda+2)(b_2+Ab_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ na_n &= (\lambda+2)(b_{n-2}+Ab_{n-1}) \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Изъ этихъ уравненiй видно, что какъ скоро извѣстны $A, b_0, b_1, b_2 \ldots b_n, \ldots b_{\lambda-1}$ и λ, мы легко можемъ опредѣлить коэффицiенты $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Уравненiе (11) даетъ при $x = 0$ деривацiонное уравненiе:

$$2c_0b_1 + c_1b_0 = mAa_0, \tag{29}$$

изъ котораго можно опредѣлить a_0 по b_0 и b_1.

---

[1]) *Бугаевъ.* Общiя основанiя исчисленiя $E\varphi x$; стр. 152—162; или Мат. Сб. томъ XIII, стр. 54—64.

Уравненіе (I) при $x=0$ по сокращеніи на 2 даетъ дериваціонное уравненіе:

$$4c_0Ab_2+(3c_1A-2c_0)b_1+[2c_2-c_1-2(\lambda+2)^2A^3]b_0=0. \quad (30)$$

Это уравненіе мы будемъ называть *основнымъ деривацiоннымъ уравненiемъ*.

Оно само, а также его дериваціи дадутъ всѣ необходимыя уравненія для опредѣленія b_0, b_1, b_2 коеффиціентовъ полинома q и величины A въ различныхъ предположеніяхъ для цѣлаго числа λ. Эти же уравненія дадутъ и условія, которымъ должны удовлетворять коеффиціенты c_0, c_1, c_2, c_3 полинома R для различныхъ предположеній относительно λ для того, чтобы интегралъ эллиптическій могъ быть представленъ въ формѣ (8). Вопросъ такимъ образомъ рѣшается въ общемъ видѣ и не является никакой необходимости прибѣгать къ разложенію $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь.

§ 7. Различные частные случаи.

Чтобы показать примѣненіе основнаго дериваціоннаго уравненія (30) къ рѣшенію вопроса о выраженіи эллиптическихъ интеграловъ въ конечной формѣ (8), разсмотримъ различные частные случаи.

Первый случай. *Полиномъ q нулевой степени.*

Въ этомъ случаѣ

$$q=b_0=1$$

$$p=a_0+a_1x+a_2x^2=a_0+a_1x+x^2.$$

Въ основномъ уравненіи (30) мы должны положить:

$$b_0=1,\ b_1=0,\ b_2=0$$

$$\lambda=0,\ m=4.$$

Уравненіе (30) приметъ видъ:

$$2c_2A-c_1-8A^3=0. \quad (31)$$

Первая деривація этого уравненія даетъ:

$$6c_3 A - 24A^2 = 0 \text{ или } c_3 A - 4A^2 = 0. \qquad (32)$$

Вторая деривація даетъ:

$$c_3 - 4A = 0. \qquad (33)$$

Третья деривація даетъ:

$$0 = 0.$$

Три уравненія (31), (32), (33) даютъ всѣ элементы для рѣшенія вопроса.

Опредѣляя A изъ уравненія (32), мы находимъ два рѣшенія:

$$A = 0 \text{ и } A = \frac{c_3}{4}.$$

Первый случай: $A = 0$.

На основаніи уравненій (31) и (33) получимъ условія

$$c_1 = 0,\ c_3 = 0.$$

Такимъ образомъ первый случай будетъ относиться къ интегралу

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + c_2 x^2 + c_0}},$$

который, какъ извѣстно, изображается въ конечномъ видѣ.

Второй случай даетъ

$$A = \frac{c_3}{4}.$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (31), мы послѣ приведенія получаемъ условіе:

$$c_3^3 + 8c_1 - 4c_2 c_3 = 0. \qquad (34)$$

Это есть извѣстное условіе, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{R}} = \frac{1}{4}\, lg\left(\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sqrt{R}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - \sqrt{R}}\right)$$

На основаніи уравненія (29) имѣемъ:

$$a_0 = \frac{c_1}{c_3}.$$

На основаніи уравненій (29) находимъ:

$$a_1 = \frac{c_3}{2}$$

и слѣдовательно

$$\int \frac{x + \frac{c_3}{4}}{\sqrt{x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0}} = \frac{1}{4} \lg \frac{\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_3}{2} x + x^2 + \sqrt{R}}{\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_3}{2} x + x^2 - \sqrt{R}}$$

при условіи

$$c_3^3 + 8c_1 - 4c_2 c_3 = 0. \qquad (34)$$

§ 8. Случай, когда полиномъ q первой степени.

Въ этомъ случаѣ

$$q = b_0 + x.$$

Полиномъ p будетъ третьей степени.

Въ основномъ дериваціонномъ уравненіи (30) слѣдуетъ положить:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0$$

$$\lambda = 1,\ m = 6.$$

Основное уравненіе приметъ видъ:

$$3c_1 A - 2c_0 + (2c_2 A - c_1 - 18A^3) b_0 = 0. \qquad (35)$$

Послѣдовательныя дериваціи послѣ сокращеній даютъ:

$$4c_2 A - 9A^3 + 3(c_3 A - 9A^2) b_0 = 0, \qquad (35a)$$

$$4c_2 + 15c_3 A - 54A^2 + 3(c_3 - 14A) b_0 = 0, \qquad (36)$$

$$c_3 = 3A + b_0. \qquad (37)$$

Деривація послѣдняго уравненія даетъ тождество:

$$4c_4 = 4 = 3 + 1.$$

a) Уравненіе (35) показываетъ, что возможно рѣшеніе при $A = 0$. Въ этомъ случаѣ коеффиціенты должны удовлетворять условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} 2c_0 + c_1 b_0 = 0 \\ 4c_2 + 3c_3 b_0 = 0 \\ c_3 = b_0 \end{array}\right\} \qquad (38)$$

Исключивъ b_0 мы видимъ, что должны существовать два условія:

$$\left.\begin{array}{l} 2c_0 + c_1 c_3 = 0 \\ 4c_2 + 3c_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (39)$$

которымъ должны удовлетворять коеффиціенты полинома R для того, чтобы было возможно уравненіе (8).

b) Если же A не равно нулю, то въ этомъ случаѣ, сокративъ на A уравненіе (35), получимъ уравненіе:

$$4c_2 - 9A^2 + 3(c_3 - 9A)b_0 = 0$$

или уравненіе

$$9A^2 + 3(9A - c_3) = 4c_2.$$

Деривація этого уравненія послѣ сокращенія даетъ:

$$3A + b_0 = c_3.$$

Такимъ образомъ для случая, когда A неравно нулю, получимъ систему трехъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1 A - 2c_0 + (2c_2 A - c_1 - 18A^3)b_0 = 0 \\ 9A^2 + 3(9A - c_3)b_0 = 4c_2 \\ 3A + b_0 = c_3 \end{array}\right\} \qquad (40)$$

изъ которыхъ найдемъ A и b_0.

Если исключимъ A и b_0, найдемъ условіе, которому должны удовлетворять коеффиціенты, для того, чтобы эллиптическій интегралъ могъ быть представленъ въ формѣ (8).

Коеффиціенты a_0, a_1, a_2 могутъ быть найдены изъ уравненій (28) и (29).

§ 9. Примѣръ. Примѣняя эти уравненія къ интегралу:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4-2x^2-x}}$$

мы полагаемъ:

$$\lambda = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,$$

$$m = 2(\lambda + 2) = 6,$$

$$c_0 = 0,\ c_1 = -1,\ c_2 = -2,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1.$$

Система уравненій (40) приметъ для этого случая видъ:

$$-3A + (1 - 4A - 18A^3)b_0 = 0,$$

$$9A^2 + 27Ab_0 = -8,$$

$$3A + b_0 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ:

$$A = \frac{1}{3},\ b_0 = -1,\ b_1 = 1.$$

Уравненіе (29) даетъ:

$$a_0 = \frac{1}{2}.$$

Уравненія (28) дадутъ:

$$a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1;$$

слѣдовательно

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^4-2x^2-x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\, lg\left[\frac{x^3-x^2-x+\frac{1}{2}+(x-1)\sqrt{x^4-2x^2-x}}{x^3-x^2-x+\frac{1}{2}-(x-1)\sqrt{x^4-2x^2-x}}\right].$$

Вообще, если желаемъ опредѣлить условія того, чтобы интегралъ выражался въ конечномъ видѣ по формулѣ (8), гдѣ q полиномъ степени n, слѣдуетъ положить: $\lambda=n$, $b_n=1$ и взять $n+1$ деривацій уравненія (30), тогда получимъ $n+2$ уравненій, изъ которыхъ найдемъ $n+1$ величинъ $b_0, b_1 \ldots b_{n-1}$, A. Исключивъ изъ $n+2$ уравненій $n+1$ величинъ, находимъ то соотношеніе между коеффиціентами полинома R, при которомъ имѣетъ мѣсто уравненіе (8).

При этихъ деривацiяхъ слѣдуетъ полагать:

$$b_n=1,\ b_{n+1}=0,\ b_{n+2}=0$$

и т. д.

Дальнѣйшія дериваціонныя уравненія должны давать простыя тождества или уравненія, которыя являются простыми слѣдствіями предыдущихъ уравненій. При практическомъ примѣненіи нашихъ формулъ къ опредѣленію полинома q можетъ послужить уравненіе (I) еще инымъ способомъ.

Означая черезъ α, β, γ, δ корни полинома R, мы, вставивъ одинъ изъ корней въ уравненіе (I), получаемъ уравненіе:

$$6\,\Big/^{x=\alpha}\left[(x+A)\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dq}{dx}\right]+\Big/^{x=\alpha}\left[2(x+A)\frac{d^2R}{dx^2}-2\frac{dR}{dx}-m(x+A)^3\right]=0.$$

Это уравненіе представляетъ зависимость между коеффиціентами q и числомъ A. Такъ какъ такихъ уравненій можно

написать 4, то можно найти четыре такихъ соотношенія, которыя также могутъ послужить къ рѣшенію вопроса.

Можно также отыскивать деривацiи этихъ уравненій.

§ 10. **Дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ дробь $\frac{p}{q}$.**

Можно интегралъ (8) привести къ виду:

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{m}\,lg\left(\frac{\frac{p}{q}+\sqrt{R}}{\frac{p}{q}-\sqrt{R}}\right)=\frac{1}{m}\,lg\left(\frac{z+\sqrt{R}}{z-\sqrt{R}}\right) \qquad (41)$$

гдѣ

$$z=\frac{p}{q}.$$

Въ этомъ случаѣ z есть раціональная функція, у которой степень числителя на двѣ единицы болѣе степени знаменателя.

Взявъ производную, мы видимъ, что z удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$2(x+A)(z^2-R)=\frac{dR}{dx}z-2R\frac{dz}{dx} \qquad (42)$$

или уравненію

$$2R\frac{dz}{dx}+m(x+A)z^2-\frac{dR}{dx}z=m(x+A)R. \qquad (43)$$

Уравненіе (43) есть уравненіе извѣстнаго типа

$$\frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+S=0.$$

Вопросъ объ опредѣленіи $\frac{p}{q}$ приводится къ опредѣленію частнаго интеграла уравненія (43) въ формѣ раціональной дроби.

Мы доказали, что такой интегралъ всегда можно найти, если только онъ существуетъ. Пріемы, которыми онъ опредѣляется, изложены въ нашей статьѣ [1]). На этомъ основаніи мы считаемъ вопросъ о представленіи эллиптической функціи въ формѣ (8) рѣшеннымъ.

Кромѣ того уравненіе (43) и пріемы его интегрированія прямо даютъ раціональное объясненіе, почему вопросъ этотъ находится въ тѣсной и необходимой связи съ теоріей непрерывныхъ дробей.

§ 11. **Нѣкоторыя критическія замѣчанія.** Такое рѣшеніе вопроса, по которому его рѣшеніе ставится въ связь съ опредѣленіемъ частнаго интеграла въ формѣ раціональной дроби дифференціальнаго уравненія (43), отличается большею общностью сравнительно съ тою, какая была дана у Абеля. У Абеля этотъ вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ совокупныхъ уравненій:

$$pq\frac{dR}{dx}+2\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)R=m(x+A)C \qquad (9)$$

$$p^2-Rq^2=C, \qquad (10)$$

Такимъ образомъ оставался не рѣшеннымъ вопросъ, существуютъ ли иныя рѣшенія для p и q кромѣ тѣхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію (10) и всѣ ли рѣшенія исчерпываются уравненіями (9) и (10).

Оказывается, что не всѣ рѣшенія исчерпываются этими уравненіями и существуютъ рѣшенія или полиномы P и Q, которые не удовлетворяютъ уравненію (10).

Эти рѣшенія въ постановкѣ Абеля какъ бы ускользаютъ отъ вниманія изслѣдователя.

---

[1]) *Бугаевъ.* Дробные частные интегралы дифференціальныхъ уравненій. (Приложеніе къ LXVII тому Записокъ Императорской академіи наукъ Спб., 1891, № 4).

Причина этого заключается въ томъ, что, взявъ производную уравненія (8), мы для большей общности должны были бы положить эти уравненія не въ формѣ (9) и (10), а въ формѣ уравненій:

$$pq\frac{dR}{dx}+2\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)R=m(x+A)\psi(x) \qquad (44)$$

$$p^2-Rq^2=\psi(x) \qquad (45)$$

гдѣ $\psi(x)$ есть произвольная цѣлая функція.

Такимъ образомъ пришлось бы изслѣдовать множество другихъ случаевъ, или доказать, что нѣтъ иныхъ формъ для $\psi(x)$ кромѣ постояннаго числа, допускающихъ рѣшеніе вопроса въ формѣ (8). Приведеніе вопроса къ уравненію (43) не требуетъ этихъ дополнительныхъ изысканій и даетъ всѣ возможныя рѣшенія вопроса.

Чтобы доказать, что уравненіе (42) можетъ обнаружить рѣшенія, не удовлетворяющія уравненію (10), замѣтимъ, что если z есть интегралъ уравненія (42), то и $\frac{R}{z}$ будетъ тоже его интеграломъ.

Дѣйствительно, вставивъ вмѣсто z выраженіе $\frac{R}{z}$, получимъ:

$$m(x+A)\left(\frac{R}{z^2}-R\right)=\frac{dR}{dx}\cdot\frac{R}{z}-\frac{2R}{z^2}\left(z\frac{dR}{dx}-R\frac{dz}{dx}\right)$$

или

$$m(x+A)(R-z^2)=-z\frac{dR}{dx}+2R\frac{dz}{dx},$$

что послѣ перемѣны знака дастъ прежнее уравненіе (42).

Такимъ образомъ если $z=\frac{p}{q}$ служитъ интеграломъ уравненія (43), то и $u=\frac{qR}{p}$ будетъ тоже его интеграломъ.

Такимъ образомъ

$$P = qR,\ Q = p$$

будутъ тоже рѣшеніями, удовлетворяющими уравненію:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m}\, lg \left[\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right]$$

между тѣмъ какъ

$$P^2 - RQ^2 = \mp C.$$

Дѣйствительно

$$P^2 - PQ^2 = q^2R^2 - Rp^2 = -R(p^2 - Rq^2) = -RC.$$

Такимъ образомъ существуютъ рѣшенія, соотвѣтствующія уравненіямъ (44) и (45), въ которыхъ $\psi(x) = -R$.

Правда, эти рѣшенія легко получаются изъ предыдущихъ, тѣмъ не менѣе они какъ бы ускользаютъ отъ вниманія изслѣдователей.

§ 12. **Связь рѣшеній $P=qR$ и $Q=p$ съ непрерывными дробями.** Не трудно показать, что эти рѣшенія тоже получаются изъ разложенія $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь. Если имѣетъ мѣсто уравненіе (8), $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно,

$$\sqrt{R} = r_0 + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \ddots + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{2r_0 + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \ldots}}}}}} \tag{46}$$

Въ послѣднемъ случаѣ разложеніе можно представить въ видѣ:

$$\sqrt{R} = r_0 + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \ddots + \cfrac{1}{\mu_0 + \cfrac{1}{r_0 + r_0 + \cfrac{1}{\mu_0 + \ldots}}}}}$$

или въ видѣ

$$\sqrt{R}=r_0+\cfrac{1}{\mu_0+\cfrac{1}{\mu_1+\ldots+\cfrac{1}{\mu_0+\cfrac{1}{r_0+\sqrt{R}}}}} \tag{47}$$

Положивъ

$$\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}=r_0+\cfrac{1}{\mu_0+\cfrac{1}{\mu_1+\ldots+\cfrac{1}{\mu_0}}}$$

$$\frac{P_s}{Q_s}=r_0+\cfrac{1}{\mu_0+\cfrac{1}{\mu_0+\ldots+\cfrac{1}{\mu_0+\cfrac{1}{r_0}}}}$$

находимъ

$$\frac{P_s}{Q_s}=\frac{P_{s-1}r_0+P_{s-2}}{Q_{s-1}r_0+Q_{s-2}}. \tag{48}$$

Изъ уравненія (47) также выходитъ:

$$\sqrt{R}=\frac{P_{s-1}(r_0+\sqrt{R})+P_{s-2}}{Q_{s-1}(r_0+\sqrt{R})+Q_{s-2}} \tag{49}$$

откуда получаемъ соотношеніе:

$$Q_{s-1}r_0\sqrt{R}+RQ_{s-1}+Q_{s-2}\sqrt{R}=P_{s-1}r_0+P_{s-1}\sqrt{R}+P_{s-2}.$$

Это соотношеніе даетъ два равенства:

$$RQ_{s-1}=P_{s-1}r_0+P_{s-2}=P_s \tag{50}$$

$$RQ_{s-1}r_0+Q_{s-2}=P_{s-1}=Q_s, \tag{51}$$

слѣдовательно

$$P_sQ_s=RP_{s-1}Q_{s-1}. \tag{52}$$

Такъ какъ

$$\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \pm \frac{1}{Q_{s-1} Q_s},$$

то

$$P_s Q_{s-1} - Q_s P_{s-1} = \pm 1. \qquad (53)$$

На основаніи уравненій (50) и (51) имѣемъ:

$$P_{s-1} = Q, \; Q_{s-1} = \frac{P_s}{R},$$

слѣдовательно соотношеніе (53) дастъ:

$$\frac{P_s^2}{R} - Q_s^2 = \pm 1$$

или

$$P_s^2 - RQ_s^2 = \pm R \qquad (54)$$

Изъ соотношенія (53) выходитъ также равенство:

$$P^2_{s-1} - RQ^2_{s-1} = \mp 1. \qquad (55)$$

Изъ равенствъ (54) и (55) видно, что рѣшенія

$$p^2 - Rq^2 = R$$

заключаются въ томъ же разложеніи $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь, какъ и рѣшенія уравненія

$$p^2 - Rq^2 = \pm 1.$$


…ная библиотека НГУ
1800198322

Доп Ш|Коз

СОЧИНЕНІЯ ТОГО ЖЕ АВТОРА:

1. Руководство къ ариѳметикѣ. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ. Изд. шестое. Ц. 40 к.
2. Руководство къ Ариѳметикѣ. Ариѳметика дробныхъ чиселъ. Изд. шестое. Ц. 50 к.
3. Задачникъ къ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ. Изд. 2-е. Ц. 25 к.
4. Задачникъ къ ариѳметикѣ дробныхъ чиселъ. Изд. 2-е. Ц. 30 к.
5. Начальная алгебра. Изд. 2-е. Ц. 1 р. 25 к.
6. Вопросы къ алгебрѣ. Ц. 15 к.
7. Начальная геометрія. Планиметрія. Ц. 1 р.
8. Начальная геометрія. Стереометрія. Ц. 50 к.
9. Сергѣй Алексѣевичъ Усовъ. Ц. 40 к.
10. О свободѣ воли.

---

1. Сходимость безконечныхъ рядовъ по ихъ внѣшнему виду. Ц. 1 р. 50 к.
2. Числовыя тожества, находящіяся въ связи съ свойствами символа E. Ц. 1 р. 50 к.
3. Ученіе о числовыхъ производныхъ. Ц. 3 р. 50 к.
4. Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Ц. 3 р. 50 к.
5. Общія основанія исчисленія $E\varphi(x)$ съ однимъ независимымъ перемѣннымъ. Ц. 4 р.
6. Введеніе въ теорію чиселъ. Изд. 2-е Ц. 20 к.
7. Интегрируемыя формы дифференціальныхъ уравненій. Ц. 30 к.
8. Математика, какъ орудіе научное и педагогическое. Изд. второе. Ц. 20 к.
9. Нѣкоторыя частныя теоремы для числовыхъ функцій. Ц. 20 к.
10. Дифференціальныя уравненія 1-го порядка. Ц. 20 к.
11. Общая теорема теоріи чиселъ съ одной произвольной функціей. Ц. 10 к.
12. Теорема Эйлера о многогранникахъ. Свойства плоской геометрической сѣти. Ц. 10 к.
13. Нѣкоторые вопросы числовой алгебры. Ц. 20 к.
14. Числовыя уравненія второй степени. Ц. 25 к.
15. Къ теоріи дѣлимости чиселъ. Ц. 20 к.
16. Къ теоріи функціональныхъ уравненій. Ц. 20 к.
17. Рѣшеніе одного шахматнаго вопроса помощію числовыхъ функцій. Ц. 20 к.
18. Нѣкоторыя свойства вычетовъ и числовыхъ суммъ. Ц. 50 к.
19. Рѣшеніе сравненій второй степени при модулѣ простомъ. Ц 20 к.
20. Раціональныя функціи, находящіяся въ связи съ теоріей приближеннаго извлеченія квадратныхъ корней. Ц. 75 к.
21. Одинъ общій законъ теоріи разбіенія чиселъ. Ц. 50 к.
22. Свойства одного числоваго интеграла по дѣлителямъ и его различныя примѣненія. Логариѳмическія числовыя функціи. Ц. 40 к.
23. Общіе пріемы вычисленія числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ. Естественная классификація цѣлыхъ чиселъ и прерывныхъ функцій. Ц. 60 к.
24. Общія преобразованія числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ. Ц. 40 к.
25. Къ теоріи сходимости рядовъ.
26. Геометрія произвольныхъ величинъ. Ц. 25 к.
27. Различныя примѣненія начала наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи алгебраическихъ функцій. Ц. 50 к.
28. Одна общая теорема алгебраическихъ кривыхъ высшаго порядка.
29. Объ уравненіяхъ пятой степени, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ (Бугаевъ и Лахтинъ).
30. Прерывная геометрія.
31. Начало наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Цѣлые частные интегралы. Ц. 50 к.
32. Дробные частные интегралы дифференціальныхъ уравненій. Ц. 15 к.
33. Выраженіе эллиптическихъ интеграловъ въ конечномъ видѣ. Ц. 40 к.

ОБЩІЯ УСЛОВІЯ

ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ

ЭЛЛИПТИЧЕСКАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛА.

Н. В. БУГАЕВА.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 4 марта 1892 г.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ LXIX-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМПЕР. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 8.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1892.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С. П. Б. **Эггерса и Комп.**, въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 15 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
С.-Петербургъ, Іюнь 1892 года.
Непремѣнный Секретарь, Академикъ *А. Штраухъ*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 л., № 12.

§ 1. **Связь между разложеніемъ функціи въ безконечный рядъ и подходящими дробями непрерывной дроби.**

Если какая нибудь функція $f(x)$ разлагается по убывающимъ степенямъ перемѣннаго въ безконечный рядъ вида:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x^{n+1}} + \ldots \tag{1}$$

то эта же функція разлагается также въ непрерывную дробь вида:

$$f(x) = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}} \tag{2}$$

гдѣ $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ суть цѣлые полиномы перемѣннаго x.

Обыкновенно полиномы $q_1, q_2, \ldots$ бываютъ выраженіями первой степени, но они могутъ быть и полиномами высшихъ степеней.

Требуется опредѣлить, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты разложенія $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ для того, чтобы n звѣньевъ непрерывной дроби (2) зависѣло отъ выраженій $q_1, q_2, \ldots q_n$ первой степени относительно x и полиномъ высшей степени q_{n+1} появился только въ $n+1$ звѣнѣ. Наша

задача стало быть состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить условія разложенія функціи $f(x)$ въ непрерывную дробь вида:

$$f(x)=\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n+\cfrac{1}{q_{n+1}+\cdots}}}} \tag{3}$$

гдѣ полиномъ q_{n+1} по крайней мѣрѣ выраженіе не ниже второй степени относительно x.

Не трудно видѣть, что подходящія дроби для функціи $f(x)$ будутъ:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \tag{5}$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n}}}$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n+\cfrac{1}{q_{n+1}}}}}.$$

Означивъ черезъ $\delta(Q)$ порядокъ цѣлаго полинома Q, мы изъ простаго разсмотрѣнія первыхъ n подходящихъ дробей легко усматриваемъ, что

$$\begin{gathered}\delta(P_1)=0,\ \delta(P_2)=1,\ \delta(P_3)=2,\dots\ \delta(P_n)=n-1\\ \delta(Q_1)=1,\ \delta(Q_2)=2,\ \delta(Q_3)=3,\dots\ \delta(Q_n)=n.\end{gathered} \tag{6}$$

Разность между каждыми двумя подходящими дробями выразится формулами:

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{1}{Q_1 Q_2}$$

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{1}{Q_2 Q_3} \qquad (7)$$

$$\frac{P_\mu}{Q_\mu}-\frac{P_{\mu-1}}{Q_{\mu-1}}=\frac{(-1)^{\mu+1}}{Q_{\mu-1} Q_\mu}.$$

Разложеніе функціи $f(x)$ помощію подходящихъ дробей можно представить въ видѣ:

$$f(x)=\frac{P_1}{Q_1}+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\left(\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)+\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right)+\ldots \qquad (8)$$

или въ видѣ

$$f(x)=\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1}-\frac{1}{Q_1 Q_2}+\frac{1}{Q_2 Q_3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{Q_{n-1} Q_n}+\frac{(-1)^{n+2}}{Q_n Q_{n+1}}+\ldots \qquad (9)$$

Изъ формулы (9) видно, что имѣетъ мѣсто разность:

$$f(x)-\frac{P_\mu}{Q_\mu}=\frac{(-1)^\mu}{Q_\mu Q_{\mu+1}}+\ldots \qquad (10)$$

Формула (10) показываетъ, что *подходящая дробь* $\frac{P_\mu}{Q_\mu}$ *выражаетъ разложеніе функціи* $f(x)$ *по убывающимъ степенямъ перемѣннаго съ точностію до* $\frac{1}{x^{2\mu}}$ *включительно или разность* $f(x)-\frac{P_\mu}{Q_\mu}$ *будетъ порядка одинаковаго съ выраженіемъ* $\frac{1}{x^{2\mu+1}}$, *если всѣ* $\mu+1$ *знаменателей у звѣньевъ непрерывной дроби суть полиномы первой степени.*

Положимъ n знаменателей $q_1, q_2, \ldots q_n$ суть выраженія первой степени, а полиномъ q_{n+1} второй степени. Въ этомъ случаѣ для подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ будемъ имѣть по прежнему

$$\delta(P_n)=n-1, \quad \delta(Q_n)=n.$$

Для подходящей же дроби $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ будемъ имѣть

$$\delta(P_{n+1}) = n+1, \ \delta(Q_{n+1}) = n+2,$$

то есть знаменатель подходящей дроби $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ будетъ полиномомъ $n+2$ степени.

Изъ ряда (9) вытекаетъ, что

$$f(x) = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2}}{Q_{n+1} Q_{n+2}} + \dots \tag{11}$$

то есть подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ выражаетъ разложеніе функціи $f(x)$ по убывающимъ степенямъ перемѣннаго съ точностію до порядка $\frac{1}{x^{2n+1}}$ включительно, ибо разность

$$f(x) - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} + \dots$$

будетъ порядка одинаковаго съ выраженіемъ $\frac{1}{x^{2n+2}}$, такъ какъ

$$\delta(Q_n Q_{n+1}) = \delta(Q_n) + \delta(Q_{n+1}) = 2n+2.$$

§ 2. Опредѣленіе подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$.

Положимъ, что въ подходящей дроби

$$\frac{P_n}{Q_n} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_n}}} \tag{12}$$

n полиномовъ $q_1, q_2, \dots q_n$ будутъ полиномами первой степени.

Въ этомъ случаѣ можно положить

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{b_0 x_n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}. \tag{13}$$

Здѣсь мы имѣемъ $2n+1$ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ.

Такъ какъ числителя и знаменателя можно раздѣлить на одинъ изъ коэффиціентомъ, то собственно неизвѣстныхъ величинъ будетъ только $2n$. Эти величины можно опредѣлить по коэффиціентамъ разложенія $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ на томъ основаніи, что подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ выражаетъ означенное разложеніе съ точностію до $\frac{1}{x^{2n}}$ включительно.

Такимъ образомъ вообще имѣемъ:

$$\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{x^{2n}} + R\left(\frac{1}{x}\right) \quad (14)$$

Если же q_{n+1} будетъ полиномомъ второй степени, то подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ совпадаетъ съ безконечнымъ рядомъ до члена порядка $\frac{1}{x^{2n+1}}$, то есть справедливо разложеніе

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{\alpha_{2n}}{x^{2n+1}} + R_1\left(\frac{1}{x}\right). \quad (15)$$

Въ означенныхъ разложеніяхъ функціи $R\left(\frac{1}{x}\right)$ и $R_1\left(\frac{1}{x}\right)$ содержатъ только члены, зависящіе отъ высшихъ степеней дроби $\frac{1}{x}$.

На основаніи уравненія (14), мы, полагая $x = \frac{1}{y}$, имѣемъ равенство:

$$\frac{\psi_n\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi_n\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_{n-1} y^{n-1})\, y}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y_n} =$$

$$= y\,(\alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y + \ldots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1}) + R(y). \quad (16)$$

откуда

$$\frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_{n-1} y^{n-1}}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1} + k y^{2n} + \ldots \quad (17)$$

Если же полиномъ q_{n+1} будетъ второй степени, то справедливо уравненіе (15), которое приметъ видъ:

$$\frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_{n-1} y^{n-1}}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1} + \alpha_{2n} y^{2n} + k_1 y^{2n+1} + \ldots \quad (18)$$

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію коэффиціентовъ подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ выведемъ одно

§ 3. Дериваціонное соотношеніе подобное теоремѣ Лейбница.

Изъ теоремы Лейбница

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = u\frac{d^n v}{dx^n} + n\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots + v\frac{d^n v}{dx^n}$$

полагая $x=0$, получимъ деривaціонное уравненіе:

$$D^n(a_0b_0) = a_0D^nb_0 + nDa_0\cdot D^{n-1}b_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}D^2a_0\cdot D^{n-2}b_0 + \ldots + b_0D^nb_0.$$

При вычисленіи деривацій должны имѣть мѣсто равенства:

$$Da_0 = a_1$$

$$Da_1 = 2a_2$$

$$Da_2 = 3a_3$$

$$\ldots\ldots$$

$$Da_n = (n+1)a_{n+1}.$$

Такъ какъ

$$D^\mu(a_0) = 1, 2, 3\ldots\mu\, a_\mu = \Pi(\mu)\, a_\mu$$

то формула Лейбница даетъ деривaціонное уравненіе:

$$D^n(a_0b_0) = \Pi(\mu)\left[a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0\right]. \quad (19)$$

§ 4. Вычисленіе коэффиціентовъ подходящей дроби.

Изъ уравненія (17) вытекаетъ при $y=0$ деривaціонное уравненіе

$$a_0 = \alpha_0 b_0.$$

Производя рядъ послѣдовательныхъ деривацій этого уравненія и принимая во вниманіе соотношеніе (19), получаемъ послѣ сокращеній деривaціонныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 b_0 \\ a_1 &= \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0 \\ a_2 &= \alpha_0 b_2 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= \alpha_0 b_{n-1} + \alpha_1 b_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} b_0 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Эти уравненія даютъ возможность опредѣлить коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ полинова P_n, какъ скоро извѣстны $b_0, b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ коэффиціенты полинома Q_n или знаменателя подходящей дроби.

Производя дальнѣйшія дериваціи и принимая во вниманіе, что

$$a_n = 0,\ a_{n+1} = 0,$$

а также

$$b_{n+1} = 0,\ b_{n+2} = 0 \text{ и т. д.}$$

имѣемъ слѣдующій рядъ дериваціонныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} Da_{n-1} = na_n = 0 &= \alpha_0 b_n + \alpha_1 b_{n-1} + \dots + \alpha_n b_0 \\ 0 &= \alpha_1 b_n + \alpha_2 b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+1} b_0 \\ 0 &= \alpha_2 b_n + \alpha_3 b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+2} b_0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= \alpha_\mu b_n + \alpha_{\mu+1} b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+\mu} b_0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= \alpha_{n-1} b_n + \alpha_n b_{n-1} + \dots + \alpha_{2n-1} b_0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Такъ какъ b_0 можетъ быть произвольною величиною, то n величинъ $b_1, b_2, \dots b_n$ можно опредѣлить изъ n уравненій (21) по $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}$.

Такимъ образомъ всѣ коэффиціенты подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ всегда можно опредѣлить по коэффиціентамъ разложенія функціи въ рядъ.

§ 5. Условіе, которому удовлетворяютъ коэффиціенты разложенія для того, чтобы полиномъ q_{n+1} былъ второй степени.

Если q_{n+1} будетъ полиномомъ второй степени, имѣетъ мѣсто уравненіе (18), а вмѣстѣ съ уравненіями (21) должно имѣть мѣсто деривaціонное уравненіе

$$0 = \alpha_n b_n + \alpha_{n+1} b_{n-1} + \ldots + \alpha_{2n} b_0. \qquad (22)$$

Такимъ образомъ для того, чтобы n выраженій $q_1, q_2, \ldots q_n$ были полиномами первой степени, а выраженіе q_{n+1} было полиномомъ второй степени, необходимо, чтобы имѣли мѣсто $n+1$ уравненій (21) и (22).

Совмѣстно же эти уравненія могутъ существовать только тогда, когда опредѣлитель изъ коэффиціентовъ уравненій (21) и (22) равняется нулю.

Такимъ образомъ $n+1$ звѣно будетъ зависѣть отъ q_{n+1} полинома второй степени только тогда, когда существуетъ условіе:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \alpha_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Такъ для того, чтобы q_1 было выраженіемъ второй степени, необходимо должно удовлетворяться условіе:

$$\alpha_0 = 0. \qquad (24)$$

Для того, чтобы q_1 было выраженіемъ первой, а q_2 выраженіемъ второй степени должно удовлетворяться условіе:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

и т. д.

Если полиномъ q_{n+1} будетъ полиномомъ третьей степени, должно еще къ уравненіямъ (21) и (22) присоединить слѣдующее деривaціонное уравненіе:

$$0 = \alpha_{n+1} b_n + \alpha_{n+2} b_{n-1} + \ldots + \alpha_{2n+1} b_0 \qquad (26)$$

Совмѣстное существованіе уравненій (21), (22) и (26) требуетъ существованія двухъ условій:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n, & \alpha_{n+1}, & \ldots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (27)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots & \alpha_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+1}, & \alpha_{n+2}, & \ldots & \alpha_{2n+1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (28)$$

При помощи выведеннаго нами соотношенія (23), мы можемъ найти тѣ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома

$$R = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$$

для того, чтобы могъ быть представленъ въ конечномъ видѣ эллиптическій интегралъ въ формѣ:

$$\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}} = \frac{1}{m} \lg \left[\frac{p+q\sqrt{R}}{p+q\sqrt{R}}\right]. \qquad (29)$$

Для этого слѣдуетъ предварительно найти

§ 6. **Разложеніе $\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}$ въ рядъ по убывающимъ степенямъ перемѣннаго.**

Положимъ, что

$$\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \ldots \quad (30)$$

Замѣняя x черезъ $\frac{1}{y}$, находимъ послѣ умноженія на y^2 разложеніе

$$\sqrt{p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots \quad (31)$$

Изъ равенства (31) вытекаетъ, что

$$a_0 = \sqrt{p_0}$$

$$a_1 = D\sqrt{p_0}$$

$$a_2 = \frac{1}{1.2} D^2 (\sqrt{p_0})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_\mu = \frac{1}{\pi(\mu)} D^\mu (\sqrt{p_0})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ знакъ D есть знакъ дериваціи.

При вычисленіяхъ мы должны принимать во вниманіе деривaціонныя уравненія:

$$Dp_0 = p_1$$

$$Dp_1 = 2p_2$$

$$Dp_2 = 3p_3$$

$$Dp_3 = 4p_4$$

$$Dp_4 = 5p_5 = 0.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$D\sqrt{p_0} = \frac{p_1}{2\sqrt{p_0}}$$

$$D^2\sqrt{p_0} = \frac{4p_2p_0 - p_1^2}{4p_0^{\frac{3}{2}}}$$

$$D^3\sqrt{p_0} = \frac{24p_0^2p_3 - 12p_0p_1p_2 + 3p_1^3}{8p_0^{\frac{5}{2}}}$$

и т. д.

Если $p_0 = 1$

$$\left[D\sqrt{p_0}\right]_{p_0=1} = \frac{p_1}{2}$$

$$\left[D^2\sqrt{p_0}\right]_{p_0=1} = \frac{4p_2 - p_1^2}{4}$$

$$\left[D^3\sqrt{p_0}\right]_{p_0=1} = \frac{24p_3 - 12p_1p_2 + 3p_3^2}{8}.$$

Самое разложеніе (30) по убывающимъ степенямъ перемѣннаго приметъ видъ:

$$\sqrt{p_0x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4} = \sqrt{p_0}\,.\,x^2 + D\sqrt{p_0}\,.\,x +$$

$$+ \frac{D^2\sqrt{p_0}}{1.2} + \frac{D^3\sqrt{p_0}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{D^4\sqrt{p_0}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots \qquad (32)$$

§ 7. Опредѣленіе условій выраженія въ конечномъ видѣ интеграла.

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4}}.$$

Абель доказалъ, что интегралъ этотъ выражается въ конечномъ видѣ въ формѣ уравненія

$$\int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4}} = \int\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{R}}\,\frac{1}{m}\,\lg\left[\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right] \qquad (29)$$

въ томъ случаѣ, когда $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь. Это же бываетъ тогда, когда одно изъ звѣньевъ непрерывной дроби зависитъ отъ квадратнаго полинома.

Мы показали, что условіе того, чтобы n звѣньевъ непрерывной дроби были выраженіями первой степени, а $n+1$ звѣно зависѣло отъ полинома второй степени выражается равенствомъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots \alpha_{2n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Прилагая эту теорему къ нашему случаю, мы должны на основаніи уравненія (32) положить въ формулѣ (23):

$$\alpha_0 = \left[\frac{D^3\sqrt{p_0}}{1.2.3}\right]_{p_0=1}$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{D^4\sqrt{p_0}}{1.2.3.4}\right]_{p_0=1}$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{D^5\sqrt{p_0}}{\Pi(5)}\right]_{p_0=1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = \left[\frac{D^{n+3}\sqrt{p_0}}{\Pi(n+3)}\right]_{p_0=1}.$$

Такимъ образомъ условіе того, чтобы въ разложеніи квадратнаго корня въ непрерывную дробь первое звѣно имѣло въ знаменателѣ полиномъ второй степени, выражается уравненіемъ:

$$\alpha_0 = \left[\frac{1}{1.2.3} D^3\sqrt{p_0}\right]_{p_0=1} = 0. \qquad (33)$$

Условіе того, чтобы второе звѣно зависѣло отъ квадратнаго полинома будетъ выражаться равенствомъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 = 0$$

или

$$\left[\frac{1}{1.2.3} D^3 \sqrt{p_0} \cdot \frac{1}{1.2.3\;4.5} D^5 \sqrt{p_0} - \left(\frac{1}{1.2.3.4} D^4 \sqrt{p_0}\right)^2\right]_{p_0=1} = 0$$

или

$$\left[4D^3\sqrt{p_0} \cdot D^5\sqrt{p_0} - 5\left(D^4\sqrt{p_0}\right)^2\right]_{p_0=1} = 0 \qquad (34)$$

Условіе (33), написанное въ развернутомъ видѣ даетъ послѣ сокращенія соотношеніе:

$$8p_3 + 4p_1p_2 + p_1{}^3 = 0. \qquad (33a)$$

Соотношеніе (34) является въ болѣе сложной формѣ.

Мы видимъ, что существуетъ безчисленное множество условій интегрируемости въ конечномъ видѣ эллиптическаго дифференціала.

Величину $D^n \sqrt{p_0}$ можно опредѣлить или непосредственной дериваціей или послѣдовательнымъ вычисленіемъ по формуламъ, выводимымъ изъ уравненія (31).

Возвысивъ въ квадратъ уравненіе (31), имѣемъ:

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 =$$

$$= \left[\sqrt{p_0} + D_1x + \frac{D_2}{1.2}x^2 + \frac{D_3}{1.2.3}x^3 + \ldots\right] \qquad (35)$$

гдѣ для краткости полагаемъ:

$$D_1 = D\sqrt{p_0}$$

$$D_2 = D^2\sqrt{p_0}$$

$$D_3 = D^2\sqrt{p_0}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Уравненіе (35) даетъ рядъ соотношеній

$$2\sqrt{p_0}\,D_1 = p_1$$

$$D_1^2 + \sqrt{p_0}\,D_2 = p_2$$

$$p_0^{\frac{1}{2}} D_3 + 3\,D_1 D_2 = 3\,p_3$$

$$\sqrt{p_0}\,D_4 + 4\,D_1 D_3 + 3\,D_2^2 = 12\,p_4.$$

Вообще для четнаго числа $n = p$ большаго 4 имѣемъ:

$$\sqrt{p_0}\,\frac{D_p}{\Pi(p)} + \frac{2D_1\,D_{p-1}}{\Pi(p-1)} + \frac{2D_2\,D_{p-2}}{\Pi(2)\,\Pi(p-2)} + \ldots \left[\frac{D_{\frac{p}{2}}}{\Pi\left(\frac{p}{2}\right)}\right]^2 = 0. \quad (36)$$

Для нечетнаго числа $n = i$ большаго четырехъ имѣемъ:

$$\sqrt{p_0}\,\frac{D_i}{\Pi(i)} + \frac{D_1 . D_{i-1}}{\Pi(i-1)} + \frac{D_2 . D_{i-2}}{\Pi(2)\,\Pi(i-2)} + \ldots = 0. \quad (37)$$

Прилагая наши вычисленія къ примѣру

$$\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} \quad (38)$$

имѣемъ:

$$p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = -2,\ p_3 = -1,\ p_4 = 0$$

$$D_1 = 0,\ D_2 = -2,\ D_3 = -3,\ D_4 = -12,\ D_5 = -60$$

$$\alpha_0 = \frac{D_3}{1.2.3} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{D_4}{1.2.3.4} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{D_5}{1.2.3.4.5} = -\frac{1}{2}.$$

Наше условіе даетъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0,$$

слѣдовательно интегралъ (38) выражается въ конечномъ видѣ.

Дѣйствительно имѣемъ:

$$\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right) dx}{\sqrt{x^4-2x^2-x}} = \frac{1}{6} \lg \left[\frac{2x^3-2x^2-2x+1+(2x-2)\sqrt{x^4-2x^2-x}}{2x^3-2x^2-2x+1-(2x-2)\sqrt{x^4-2x^2-x}}\right].$$

ДОПОЛНЕНІЕ.

§ 8. Предложенный мною способъ полученія условій интегрируемости есть въ тоже время и особый деривaціонный методъ для рѣшенія задачи Абеля. Давая нѣкоторыя уравненія, сходныя съ уравненіями Абеля *), онъ даетъ возможность вывести легко и всѣ остальныя его уравненія. Отличаясь простотою и точностію, онъ не ведетъ однако къ тѣмъ недоразумѣніямъ, которыя возбуждаются пріемомъ Абеля. Абель, находя изъ уравненія

$$P^2 - RQ^2 = 1$$

съуживаетъ задачу. Прилагая свои выводы, онъ даетъ примѣръ справедливый при произвольномъ α, но въ которомъ

$$P^2 - RQ^2 = \frac{\alpha^2 - 8\alpha + 16}{4}$$

и слѣдовательно

$P^2 - RQ^2$ не равно 1 при произвольномъ α.

---

*) Abel. Oeuvres complètes d'Abel. 1839. T. II, стр. 141—146.

Вслѣдствіе этого его методъ недостаточенъ и можетъ повести къ невѣрнымъ заключеніямъ.

Общую формулу для выраженія $D^n(\sqrt{p_0})$, входящаго въ мое условіе интегрируемости (23), легко получить, слѣдуя тѣмъ пріемамъ, которые изложены мною на стр. 147—162, а также на стр. 134—136 моего сочиненія: Общія основанія исчисленія $E(\varphi x)$.

450-